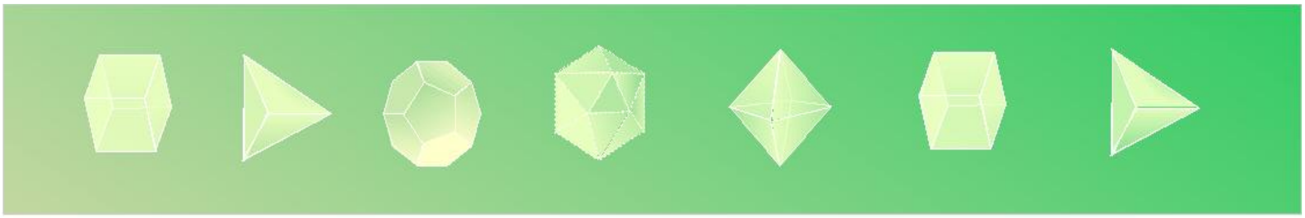


1. Els nombres racionals

Resum

En aquest capítol recordarem moltes de les coses que ja saps de cursos anteriors, com les operacions amb nombres naturals i enters, les operacions amb fraccions i expressions decimals. Estudiarem els

nombres racionals

---

0. ET CONVÉ RECORDAR

0.1. Prioritat de les operacions

Quan no hi ha parèntesis que ens indiquin quina operació cal fer primer o en operacions dins d'un parèntesi, es va arribar a un acord per saber com actuar. És a dir:

1r Es resolen els parèntesis interiors.

Si no hi ha parèntesis o dins d'un parèntesi farem:

2n Les potències i les arrels

3r Les multiplicacions i divisions.

4t Les sumes i restes.

S'han d'evitar:

Expressions del tipus 1 - 100: 5 · 5, on no està clar què fer (la multiplicació i divisió tenen igual prioritat). S'han de posar parèntesis per indicar quina fer primer. L'expressió de dalt pot ser:
1 - (100: 5) · 5 = -99 o bé 1 - 100: (5 · 5) = -3.
De totes maneres, si te la trobes, faràs:

5è Si hi ha diverses operacions amb igual prioritat es faran d'esquerra a dreta.

Exemples:

- (5 — 7) · 10 - 8 **No podem fer** 10 - 8 (bé sí pots, però no has de fer) Primer farem el parèntesi ➔ -2 · 10 - 8 Després el producte ➔ -20 - 8 Finalment la resta ➔ -28
- $10-2 \cdot 3^2 = 10-2 \cdot 9 = 10 - 18 = -8$. Aquí està prohibit fer 10-2 i també està prohibit fer 2 · 3. Cal fer primer la potència
- $3 \cdot (-2 + 4)^2 - 8 - 5 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2^2 - 8 - 5 \cdot 4 = 12 - 8 - 20 = -16$
- -10^2 val –100 ja que primer es fa la potència i a més el signe menys no està elevat a 2, però $(-10)^2$ sí que val+100 per $-10^2 = -10 \cdot 10 = -100$ i $(-10)^2 = (-10) \cdot (-10) = +100$
- $\sqrt{9} \cdot 25 = 3 \cdot 25 = 75$ Primer es fa l'arrel.

- 10-9x **no** és 1x ja que no pot fer-se la resta sota cap concepte.

Tingues en compte que aquesta prioritat és **vàlida** sempre, per fer operacions amb tot tipus de nombres o altres objectes (per exemple: polinomis). Val la pena saber-se-la , no?

0.2. Ús de parèntesis

Els parèntesis ens indiquen les operacions que s'han de fer primer. De fet el primer que farem seran els **parèntesis interiors** i seguirem **de dins cap a** fora. És com vestir-se: primer et poses la samarreta, després el jersei i després la caçadora. És complicat fer-ho al revés. Per això, abans de posar-te a calcular a la babalà, mira tota l'expressió per veure què es fa primer.

Hi ha d'haver tants parèntesis oberts com tancats, en cas contrari es diu que "els parèntesis no estan ben balancejats."

Si alguna cosa multiplica a un parèntesi no cal posar el símbol "·".

Exemples:

- 2 · (2 - 2 · (2- 2 ·2))= 2 · (2 - 2 · (2 -4))= 2 · (2-2 · (-2)) = 2 · (2 + 4) = 2 · 6 = 12
- 2 (3-2) = 2 · 1
- (2 - 3) (6 - 4) = -1 · 2 = -2
- Si volem dividir entre 2 el resultat de fer 75-90 ***no posarem això*** 75-90: ***2,***aquí el 2 només divideix 90. Escriurem (75-90): 2

Els parèntesis s'utilitzen per ficar arguments de funcions.

Per exemple:

Si en un programa o en la calculadora volem fer l'arrel de 100 · 3^4,escriurem *arrel*(100*3^4).

0.3. Operacions amb enters

Recordem el més important:

Suma d'enters :

Suma	+	-
+	+	>
-	>	-

Regla dels signes per a la suma:

La suma 2 nombres positius és positiva. ***Exemple:*** +5 + 7 = +12

La suma de 2 nombres negatius és negativa. ***Exemple:*** -10 - 17 = -27

Es posa el signe -, i se sumen els seus valors absoluts.

Exemple:

Si perdo 10€ i després perdo uns altres 17€, he perdut 27€

La suma d'un nombre positiu amb un altre negatiu tindrà el signe del major en valor absolut.

Es posa el signe del més gran (en valor absolut) i es resten.

Exemple:

-7 + 15 = +8;

Si perdo 7€ i després guanyo 15€, he guanyat 8€ (són majors els guanys que les pèrdues).

Exemple:

+8 + (-20) = 8 - 20 = -12

Si guanyo 8€ però després en perdo 20, he perdut 12€ (són majors les pèrdues).

<u>Producte o multiplicació d'enters :</u>

x	+	-
+	+	-
-	-	+

Regla de els signes per a la multiplicació (i la divisió):

Positiu x Positiu = Positiu
Positiu x Negatiu = Negatiu x Positiu = Negatiu
Negatiu x Negatiu = Positiu

Exemples :

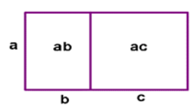
- +2 · (-7) = -14. Si rebut d'herència 2 deutes de 7 €, tinc un deute de 14 €.
- -2 · (-7) = +14. Si em treuen 2 deutes de 7 €, he guanyat 14 €!

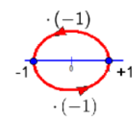
Ara una mica de matemàtiques serioses, que ja estem a 3r!

Demostració **rigorosa que "0 · *x* = 0 per a tot *x*"i que"(-1) ·(-1) = +1"**
Per això anem a utilitzar 4 propietats dels nombres que coneixes:
1a) $a + 0 = a$ per a tot nombre a (0 és l'element neutre de la suma)
2a) **La propietat distributiva:** $a\cdot(b + c)= a \cdot b + a \cdot c$ ***(veure figura adjunta)***
3a) $1 \cdot a = a$ per a tot nombre a (1 és l'element neutre del producte)
4a) $-a$ és l'oposat de $+a$, és a dir $-a + a = a + (-a)= 0$
Demostrem que "$0 \cdot x = 0$ per a tot nombre x":
Com $a - a = 0$, per la propietat distributiva: $x(a - a)= x\cdot 0 = x - x = 0$
Demostrem que " $(-1) \cdot (-1) = +1$ ":

(-1) · (-1 + 1) = (-1) · 0 = 0; però per la propietat distributiva tenim que
(-1) · (-1 + 1) = (-1) · (-1) + (-1) · 1 = (-1) · (-1) + (-1)

Després (-1) · (-1) + (-1) = 0
Si sumem 1 a ambdós membres: (-1) · (-1) + (-1) + 1 = +1 ➔
(-1) · (-1) + 0 = + 1➔ (-1) · (-1) = +1





Activitats resoltes

Calcula pas a pas:

$(((-15 - 5\cdot(-20 - 6)) : (15 - 4^2)) + 5 - 4\cdot2) \cdot (-10)$

Calculem en primer lloc $-20 - 6 = -26$; $4^2 = 16$ y $4\cdot2 = 8$ i ens queda :

$(((-15 - 5\cdot(-26)) : (15 - 16)) + 5 - 8) \cdot (-10) = (((-15 + 130) : (-1)) - 3) \cdot (-10) =$

$((115 : (-1)) - 3) \cdot (-10) = (-115 - 3) \cdot (-10) = -118 \cdot (-10) = +1180$

Activitats proposades

1. Calcula:
   a) -20 + 15 b) -2 · (-20 + 15) c) -20: (10 - 2 (-20 + 15))
   d) (-80 -20: (10 - 2 (-20 + 15))) · (3 - 2 · 3$^{2)}$

2. Calcula:
   a) -10 + 20: (-5) b) (-10 + 20): (-5) c) -100: ((-20): (-5))
   d) (-100: (- 20)): (-5) i) $\sqrt{36\cdot4}$

3. Calcula:
   a) $3-(4\cdot3-2\cdot5)^2-(3-5)^3$ b) $5-3^2-2\cdot(-5)-(7-9)^2$
   c) $7-2\cdot(3-5)^2+2\cdot(-3)+8-(-2)^2$ d) $2-(2\cdot3-3\cdot4)^2-(2-4)^3$

1. NOMBRES RACIONALS

1.1. Definició

Els **nombres racionals** són tots aquells nombres que ***poden*** expressar mitjançant una fracció de nombres enters. És a dir, el nombre *r* és **racional** si, $r = \frac{a}{b}$ amb *a i b* nombres enters i *b* diferent 0.

Una fracció és una divisió indicada, $\frac{7}{3} = 7:3$ així, però la divisió no es realitza fins que ho necessitem. Hi ha moltes ocasions en les que és millor deixar les operacions indicades. Amb un exemple n'hi haurà prou:

> Prova de fer la divisió 1,142857142857 ...: 8, difícil, no ?, però, $\frac{8}{7}:8 = \frac{1}{7}$ és una mica més senzilla i més **exacta.**

El nom "racional" prové de ***"raó" ,*** que en matemàtiques significa divisió o quocient.
El conjunt dels nombres racionals es representa per **Q.**

Un nombre racional té infinites representacions en forma de fracció.

Així: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} = \ldots$ són infinites fraccions que representen el mateix nombre racional, se'ls anomena **"equivalents"** ja que tenen el mateix valor numèric. Si fem les divisions en l'exemple totes valen 0,333 ... que és la seva expressió decimal.

Els nombres *"sencers"* són racionals ja que es poden expressar mitjançant una fracció, per exemple $-2 = \frac{-8}{4}$

Tot nombre racional té un representant que és la seva **fracció irreductible**, la que té els números més petits possibles en el numerador i el denominador. A aquesta fracció s'arriba a partir de qualsevol altra dividint el numerador i denominador pel mateix nombre. Si es vol fer en un sol pas es dividirà entre el Màxim Comú Divisor (MCD) del numerador i el denominador.

Per exemple: $\frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ on hem dividit primer entre 10 i després entre 2, però podíem haver dividit entre 20 directament ja que 20 és el MCD (60, 80). Per tant 3/4 és la fracció irreductible i per això la que representa el nombre racional que té moltes formes de fracció com 60/80 = 6/8 = 30/40 = 12/16 = 9/12 = 15/20, = 18 / 24 = 21/28 = 24/32 = 27/36 ... i per expressió decimal 0,75

1.2. Fraccions equivalents

Dues fraccions són equivalents si es verifiquen les següents condicions (totes equivalents):

- En fer la divisió obtenim la mateixa **expressió** decimal. Aquesta és la definició.

Exemple:

4: 5 = 8: 10 = 0,8 després $\frac{4}{5}\ y\ \frac{8}{10}$ són equivalents i es pot escriure que $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$

- Els **productes creuats són** iguals: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$

  És fàcil de demostrar, multipliquem a banda i banda de l'igual per *b* i per *d*

  $\frac{a}{b}\cdot b\cdot d=\frac{c}{d}\cdot b\cdot d$ Com *b: b* = 1 i *d: d* = 1 ens queda *a* · *d* = *c* ·b.

Per exemple:

$\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$ ja que 12 · 4 = 8 · 6 = 48

- **En simplificar les fraccions s'arriba a la mateixa fracció irreductible.**

Si A = B i C = B per força A = C

Exemple:

$\frac{80}{60}=\frac{4}{3};\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\ luego\ \frac{80}{60}=\frac{12}{9}$

- **Es pot passar d'una fracció a una altra multiplicant (o dividint) el numerador i el denominador per un mateix nombre.**

Exemple:

$\frac{6}{4}=\frac{24}{16}$ ja n'hi ha prou multiplicar el numerador i el denominador de la primera per 4 per obtenir la segona ..

En general $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}$

Reducció a comú denominador

A fi de comparar 2 o més fraccions (veure quin és més gran) i també per poder sumar o restar és important obtenir fraccions equivalents que tinguin el mateix denominador.
Primer un ***exemple*** i després la teoria:

Vull saber si $\frac{5}{6}$ és més gran que $\frac{6}{7}$ sense fer la divisió. Busquem un múltiple comú de 6 i de 7 (si és el mínim comú múltiple millor, però no és imprescindible), 42 és múltiple de 6 i de 7 El escrivim com a nou denominador per a les 2 fraccions: $\frac{5}{6}=\frac{}{42};\frac{6}{7}=\frac{}{42}$

Ara calculem els nous numeradors: com el 6 ho he multiplicat per 7 per arribar a 42 ja que el 5 el multipliquem també per 7 per obtenir una fracció equivalent $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 7}=\frac{35}{42}$ i com el 7 ho he multiplicat per 6, el 6 també ho multiplico per 6. D'aquesta manera obtindrem $\frac{6}{7}=\frac{6\cdot 6}{7\cdot 6}=\frac{36}{42}$, ara està clar quina de les 2 és més gran no? 6/7 > 5/6

Per obtenir fraccions equivalents a $\frac{a}{b}$ *i* $\frac{c}{d}$ amb el **mateix denominador** busquem un múltiple comú de *b* i *d* (si és el mínim comú múltiple millor) que anomenem *m* i fem $\frac{a\cdot\frac{m}{b}}{m}$ i $\frac{c\cdot\frac{m}{d}}{m}$

1.3. Ordenació de fraccions

Per ordenar una sèrie de fraccions existeixen diversos procediments:

1) Fer les divisions i comparar les expressions decimals.

Aquest procediment és el més fàcil però no el més ràpid (tret que tinguis calculadora).

Per exemple:

Ens demanen que ordenem de menor a major les següents fraccions:

$$\frac{20}{19};\frac{21}{20};\frac{-20}{19};\frac{-21}{20};\frac{29}{30};\frac{28}{29}$$

Fem les divisions que donen respectivament: 1,0526 ...; 1,05; -1,0526 ...; -1,05; 0,9666 ... i 0,9655 ...

Mirant els números decimals sabem que:

$$\frac{-20}{19}<\frac{-21}{20}<\frac{28}{29}<\frac{29}{30}<\frac{21}{20}<\frac{20}{19}$$

Recorda que

Els nombres negatius són sempre menors que els positius ia més entre nombres negatius és menor el que té major valor absolut(-4 <-3).

2) Utilitza la lògica i el següent truc: Per fraccions positives $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d<b\cdot c$

Exemple:

$\frac{8}{9}<\frac{10}{11}$ ja que 8 · 11 <9 · 10.

Demostració:

8 · 11 <9 ·10 $\Rightarrow \frac{8\cdot 11}{9\cdot 11} < \frac{9\cdot 10}{9\cdot 11} \Rightarrow \frac{8}{9} < \frac{10}{11}$;hem dividit tot entre 9 · 11 i després hem simplificat.

I a l'inrevés $\frac{8}{9} < \frac{10}{11} \Rightarrow \frac{8\cdot 9\cdot 11}{9} < \frac{10\cdot 9\cdot 11}{11} \Rightarrow 8\cdot 11 < 10\cdot 9$;hem multiplicat per 9 · 11 i simplificat.

No cal que facis servir la demostració, la posem només perquè vegis que en matemàtiques "gairebé" tot té la seva explicació.
I el d'utilitzar la lògica què és?
Comencem pel més fàcil,
Exemple:

- Comparar $\frac{20}{19} y \frac{28}{29}$

$\frac{20}{19} > 1$ ja que 20> 19 Però $\frac{28}{29} < 1$ ja que 28 <29 És clar que la segona és menor.

- Una mica més difícil, $\frac{20}{19} y \frac{21}{20}$ comparem:

$$\frac{20}{19} = \frac{19+1}{19} = \frac{19}{19} + \frac{1}{19} = 1 + \frac{1}{19}$$

$$\frac{21}{20} = \frac{20+1}{20} = \frac{20}{20} + \frac{1}{20} = 1 + \frac{1}{20}$$

. Però què és més gran 1/19 o 1/20?
És major 1/19 i per tant és més gran la primera. Pensa que si dividim una pizza a 19 trossos iguals són més grans que si la dividim en 20 trossos iguals.

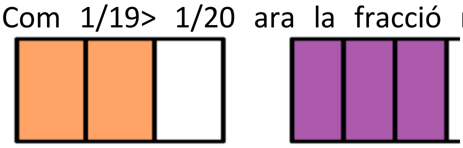
Si *a* i *b* són positius ⇒ $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Així que 1/3> 1/4 per exemple.

Més difícil encara:

- Comparem. $\frac{19}{20} y \frac{18}{19}$ Ara 19/20 = 1 - 1/20 i 18/19 = 1 - 1/19.

Com 1/19> 1/20 ara la fracció més gran és 19/20 ja que li falta menys per arribar a 1.



Amb nombres més senzills s'entén millor: 2/3 <3/4 ja que a 2/3 li falta 1/3 per arribar a 1, i a 3/4 només 1/4.

Important: Si *a* i *b* són positius llavors $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

3) **Reduir a comú denominador i comparar els** numeradors: Ens demanen que ordenem de major a menor les següents fraccions:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-9}{4};\frac{-7}{3};\frac{-2}{1}$$

Primer busquem un nombre que sigui múltiple de 6, de 8, de 4 i de 3 (si és el mínim comú múltiple millor que millor). Trobem el 24 que és múltiple de tots ells. Ho posem com a nou denominador de totes les fraccions i calculem els nous numeradors perquè les fraccions siguin equivalents: 24: 6 = 4 després el 6 cal multiplicar per 4 per arribar a 24, el mateix fem amb el 5, 5 · 4 = 20 és el nou numerador. Així amb les

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}$$
$$\frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$$
$$\frac{-9}{4}=\frac{-9\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{-54}{24}$$
$$\frac{-7}{3}=\frac{-7\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{-56}{24}$$
$$\frac{-2}{1}=\frac{-2\cdot 24}{1\cdot 24}=\frac{-48}{24}$$

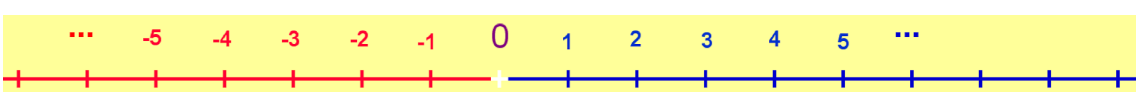
altres.

Després comparem els numeradors i obtenim que:

$$\frac{7}{8}>\frac{5}{6}>-2>\frac{-9}{4}>\frac{-7}{3}$$

ja que 21> 20> -48> -54> -56

1.4. Representació en la recta numèrica



Aquesta és la recta numèrica, en ella tot nombre real té un lloc exacte.

Recordem coses que ja saps:

Per dibuixar només es poden prendre dues decisions: on posem el 0 i on posem l'1, és a dir, on està l'origen i quina és la mida de la unitat.

Les unitats han de ser sempre de la mateixa mida.

Els nombres positius van a la dreta del 0 i els negatius a l'esquerra.

El 0 no és ni positiu ni negatiu.

La recta numèrica no té ni principi ni fi. Nosaltres només podem dibuixar una "petita" part.

Donats 2 nombres *a, b* es compleix: ***a* <b si *a* està a l'esquerra de *b*** i viceversa.

Així per exemple:

1 <3; -1 <1; -4 <- 2
Tot nombre racional té una posició predeterminada en la recta numèrica. Les infinites fraccions equivalents que formen un nombre racional cauen en el mateix punt de la recta. Així que 2/3 i 4/6, que són el mateix nombre cauen en el mateix punt.
Vegem com representar les fraccions de forma exacta.

Fracció pròpia, fracció impròpia i forma mixta

Fracció pròpia: Es diu de la fracció *a / b* on ***a* <b.** És a dir, el numerador és menor que el denominador.

Per exemple:

4/5 o 99/100.

Si *a* <*b* en fer la divisió **l'expressió decimal és inferior a**1.

Per exemple:

4/5 = 4: 5 = 0,8.

Fracció impròpia: Es diu de la fracció *a / b* on ***a*> *b*,** numerador major que el denominador.

Exemple:

15/4 o 37/27. Si fem la divisió **l'expressió decimal és més gran d'1** 15/4 = 3,75 i 37/27 = 1,37037037 ...

Nombre mixt: Les fraccions impròpies poden escriure com la suma d'un nombre enter i d'una fracció pròpia.

Així per exemple $\frac{9}{5}=\frac{5+4}{5}=1+\frac{4}{5}$ aquesta última és la forma mixta de 9/5

A Espanya no és freqüent però en el món anglosaxó sol escriure $1\frac{4}{5}$ que significa el mateix.
La calculadora científica passa a forma mixta, investiga-ho.
La forma ràpida i automàtica d'escriure una fracció en forma mixta és la següent:

$\frac{77}{6}$ és impròpia doncs 77> 6, per escriure-la en forma mixta fem la divisió entera 77: 6, és a dir, sense

77 | 6
17   12
5

$$\frac{77}{6} = 12 + \frac{5}{6}$$

decimals, ens interessa el quocient i la resta. $\frac{77}{6} = 12\frac{5}{6}$

El quocient és la part entera, la resta és el numerador de la fracció i el divisor és el denominador.

És important que ho intentis fer de cap (quan sigui raonable), és fàcil, per exemple:

47/6, busquem el múltiple de 6 més proper a 47 per baix, aquest és **7** · 6 = 42, per tant:

47/6 = 7 + 5/6 ja que d'42 a 47 van 5. Pensa, si ens mengem 47/6 de pizza, ens hem menjat 7 pizzes senceres i, a més, 5/6 de pizza.

Nota:

També és fàcil trobar el quocient i la resta amb la calculadora, per si tens pressa.

Per 437/6, fes la divisió 437: 6, obtens 72,83333 ..., la part entera és 72, només ens queda calcular la resta.

Tenim 2 camins:

1r) Fas 437-72 · 6 = 5 i llest.

2n) Multiplica la part decimal pel divisor: 0,8333 ... · 6 = 5, que és la resta. Si cal arrodoneix (0,8333 · 6 = 4,9998 que arrodonim a 5).

Només et permetem fer això si saps per què funciona, si no ho saps, oblida-ho.

Si la fracció és negativa procedim de la següent manera :

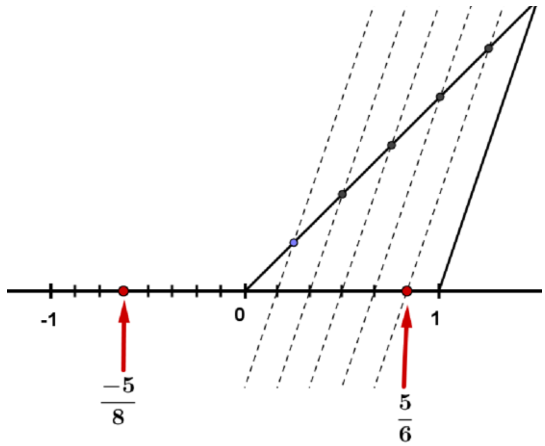
$\frac{-19}{5} = -\left(3 + \frac{4}{5}\right) = -3 - \frac{4}{5}$ ja que la divisió dóna 3 de quocient i 4 de resta.

Representació de fraccions

Si la fracció és pròpia:

Per exemple

Representa la fracció 5/6: El valor està entre 0 i 1, per tant dividim la primera unitat en 6 parts iguals



i prenem 5.

A la figura s'indica com fer-ho de forma exacta usant el ***teorema de*** Tales. Tracem una recta obliqua qualsevol que passi per 0, marquem amb el compàs 6 punts a la mateixa distància entre si (la que sigui, però igual). Unim l'últim punt amb l'1 i tracem paral·leles a aquest segment que passin pels punts intermedis de la recta obliqua (les línies discontínues). Aquestes rectes paral·leles divideixen l'interval [0, 1] en 6 parts iguals.

Fixa't que per dividir en 6 parts iguals només cal marcar 5 punts intermedis a igual distància, sempre un menys. Per dividir en 8 parts iguals marquem 7 punts intermedis.

Si la fracció és negativa es fa igual però en l'interval[-1,0] o també fent-la en positiva i traçar la longitud amb un compàs a l'altra banda de l'origen.

A la figura hem representat -5/8, hem dividit l'interval [-1, 0] en 8 parts iguals i hem comptat 5 començant en el 0. Assegura't d'entendre i si no és el cas pregunta. *Per cert, la fletxa apunta al punt i no a l'espai que hi ha entre ells.*

Si volem representar la fracció pròpia *a / b* **es divideix la primera unitat en *"b"* parts iguals i es compten *"a"* divisions.**

En cas de ser **negativa** es fa igual però comptant des de 0 cap a **l'esquerra.**

Si la fracció és impròpia:

Activitats resoltes

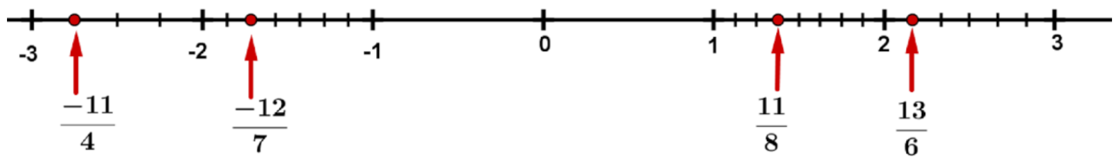
Representem 13/6. El primer és escriure en la seva forma mixta $\frac{13}{6}=2+\frac{1}{6}$ i ara és fàcil representar-la: ens anem al 2, la unitat que va del 2 al 3 la dividim en 6 parts iguals i en prenem 1 (veure imatge).

Igual per $\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}$,ens anem a l'1 i la unitat que va de l'1 al 2 la dividim en 8 parts iguals i prenem 3

Si la fracció és negativa procedim així:

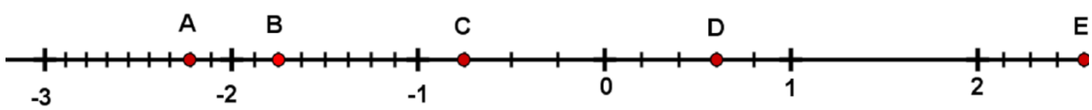
Representem $\frac{-12}{7}=-\left(1+\frac{5}{7}\right)=-1-\frac{5}{7}$, Ens anem al -1, la unitat que va del -1 al -2 la dividim en 7 parts iguals i comptem 5 cap a l'esquerra començant a -1.

Representem $\frac{-11}{4} = -\left(2+\frac{3}{4}\right) = -2-\frac{3}{4}$, Ens anem al -2, dividim en 4 parts iguals i prenem 3, comptant cap a l'esquerra i començant a -2 (veure imatge).



Activitats proposades

4. Passa a forma mixta les següents fraccions: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$
5. Passa a forma mixta les fraccions $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$
6. Representa a la recta numèrica les fraccions: $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$
7. Passa a forma mixta i representa les fraccions: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$
8. Troba les fraccions que es corresponen amb els punts *A, B, C, D* i *E,* expressant en forma mixta i com a fracció impròpia les representades pels punts *A, B* i *E.*



1.5. Operacions amb fraccions

Anem a repassar les operacions amb fraccions, en concret, la suma, la resta, el producte i la divisió.

Suma i resta de fraccions

La suma i la resta són les operacions més exigents ja que només poden sumar o restar coses iguals . No podem sumar metres amb segons, ni € amb litres. De la mateixa manera **no poden sumar-se terços amb cinquens** ni quarts amb mitjos. És a dir, no es pot fer la suma $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ així tal qual, ja que els sisens i els quarts són de diferent grandària. Però, hi haurà alguna manera de sumar ? Sí !!

El primer és trobar dues fraccions equivalents que tinguin el mateix denominador, i llavors ja sí que les podrem sumar.

Vegem l'exemple:

Un múltiple de 6 i 4 és 12. Escrivim 12 com a nou denominador i trobem els numeradors perquè les fraccions siguin equivalents :

$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2}{12}+\frac{3\cdot 3}{12}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{10+9}{12}=\frac{19}{12}$,els dotzens ja sí que es poden sumar, i el resultat són dotzens.

Un altre exemple :

$$\frac{13}{6}-\frac{51}{10}+\frac{8}{12}=\frac{13\cdot 10}{60}-\frac{51\cdot 6}{60}+\frac{8\cdot 5}{60}=\frac{130-306+40}{60}=\frac{-136}{60}=\frac{-34}{15}$$

Hem trobat un múltiple de 6, de 10 i de 12 (si és el mínim comú múltiple millor que millor), s'escriu com a denominador comú i fem 60: 6 = 10, després el 13 ho multipliquem per 10, 60:10 = 6 després el 51 ho multipliquem per 6, etc.

Quan totes les fraccions tenen el mateix denominador, se sumen o resten els numeradors, deixant el mateix denominador. Si és possible es simplifica la fracció resultant.

En els casos en què no sigui fàcil trobar el mínim comú múltiple es fa el següent:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot \mathrm{b}}{b\cdot d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Així per exemple:

$$\frac{15}{387}+\frac{19}{155}=\frac{15\cdot 155+19\cdot 387}{387\cdot 155}=\frac{9678}{59985}=\frac{3226}{19995}$$

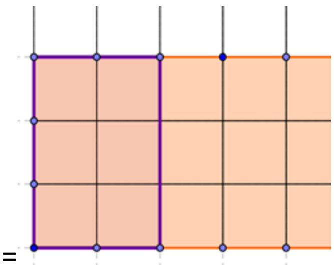
Producte i divisió de fraccions:

Sorprèn que el producte i la divisió de fraccions siguin més senzills que la suma i la resta.

Producte:

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ Es multipliquen els numeradors entre si per obtenir el numerador de la fracció producte i els denominadors entre si per determinar el denominador d'aquesta fracció, fàcil no?

Així: $\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{11\cdot 7}=\frac{15}{77}$

Per què les fraccions es multipliquen així? $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} =$  $= \frac{6}{20}$

No demostrarem el cas general , amb un exemple en tindrem prou.

$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ significa dividir en 4 parts iguals i agafar 3 (les 3 franges inferiors de la figura). Ara hem de fer 2/5 del que ens ha quedat, aquestes 3 franges les dividim en 5 parts iguals i prenem 2. Com es pot veure ens queden 6 parts iguals de les 20 totals.

A vegades convé fer la multiplicació amb intel·ligència:

$$\frac{17}{15}\cdot\frac{5}{17} = \frac{\cancel{17}\cdot 5}{15\cdot\cancel{17}} = \frac{1\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}} =$$

Abans d' multiplicar ens fixem en que el 17 es pot simplificar (per a què anem a multiplicar per 17 i després dividir per 17?) i després el 5 ja que 15 = 3 · 5.

Un altre exemple:

Fes el mateix aquí : $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$ esperem que arribis al resultat correcte ja simplificat que és 1/6 ☺

Tenim una cosa important que dir-te, no volem veure això mai, mai:

 $$\frac{\cancel{7}+3}{\cancel{7}+5} = \frac{3}{5}$$

és **absolutament fals** (**10/12**= 5/6 és el correcte). Només poden simplificar si el nombre està multiplicant en el numerador i en el denominador (si és factor comú). Això tampoc està **gens** bé.

$$\frac{\cancel{7}\cdot 2+3}{\cancel{7}\cdot 4+5} = \frac{2+3}{4+5}$$ 

Fracció inversa:

La fracció inversa de $\frac{a}{b}$ és $\frac{b}{a}$ doncs es compleix que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$ Aquesta és la definició de l'element invers per a la multiplicació.

Exemples:

La inversa de 3/4 és 4/3 i la inversa de 2 és 1/2.

Divisió:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Per dividir dues fraccions es multiplica per la inversa de la fracció que divideix.

$$\frac{6}{10}:\frac{9}{15}=\frac{6}{10}\cdot\frac{15}{12}=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=\frac{3}{4}$$

També pots multiplicar i després simplificar: $\frac{90}{120}=\frac{3}{4}$

Preguntaràs que si pots multiplicar en creu **X** (dependrà del teu professor).

Casos curiosos:

- Dividir entre una dècima és multiplicar per 10 ja que $\mathrm{a}:\frac{1}{10}=\frac{a}{1}\cdot\frac{10}{1}=10a$
- Com a cas general: dividir entre 1 /*a* és multiplicar per *a.*
- Dividir entre un nombre és com multiplicar per la seva invers: *a:* 2 = $a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$

Torres de fraccions: No t'espantis si veus això $\dfrac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{15}}$ És molt fàcil, és el mateix que $\frac{6}{10}:\frac{4}{15}=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{3\cdot 3\cdot 5}{5\cdot 4}=\frac{9}{4}$

No oblidis que "__" és el mateix que ":"

Ara tot junt.

Operacions combinades.

Aplicarem tot el que "sabem" sobre prioritat i ús de parèntesi.

Activitats resoltes

*Calcula **pas a pas i** simplifica:* $\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\right)$

Primer fem el parèntesi de més endins i la multiplicació del segon parèntesi que té prioritat sobre la resta.

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{-1}{6}\right)\right):\left(\frac{7}{14}-\frac{2}{14}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\frac{5}{14}=\left(\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right):\frac{5}{14}=\frac{11}{12}\cdot\frac{14}{5}=\frac{154}{60}=\frac{77}{30}$$

La fracció com a operador

a) Fracció d'un nombre:

Ens demanen trobar les 3/4 parts de 120.

Traduïm: trobar $\frac{3}{4}$ de 120. Aquest "de" es tradueix en matemàtiques per un "per", després:

$$\frac{3}{4}\ de\ 120=\frac{3}{4}\cdot 120=\frac{3\cdot 120}{4}=3\cdot 30=90$$

Aquest problema el podríem abordar geomètricament : Dividim 120 en 4 parts (cada part en farà 30) i d'aquestes parts, n'agafem 3, per tant, en tenim 90.

En general $\frac{a}{b}\ de\ c=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}$

b) Fracció d'una fracció:

Exemples:

$$\frac{10}{6}\ de\ \frac{4}{15}=\frac{10}{6}\cdot\frac{4}{15}=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$$

Troba les dues cinquenes parts de les deu dotzenes parts de 360.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{12}\cdot 360=\frac{2\cdot 10\cdot 360}{5\cdot 12}=\frac{20\cdot 360}{60}=20\cdot 6=120$$

c) Problema invers:

Em diuen que les tres quartes parts d'un nombre valen 66. Quin nombre és?

És clar que un quart serà 66: 3 = 22 i els 4 quarts són 22 · 4 = 88

Resumint $66\cdot\frac{4}{3}$ = 88

El cas general $\frac{a}{b}\cdot x=c\Rightarrow x=c\cdot\frac{b}{a}$ és:, **es multiplica el nombre per la fracció** inversa.

Activitats proposades

9. Troba les quatre cinquenes parts de les tres quartes parts de 12

10. Les cinc sisenes parts d'un nombre són 100, quin nombre és?

2. FRACCIONS i DECIMALS

Anem a veure com es passa de fracció a decimal i de decimal a fracció

3.1. Expressió decimal d'una fracció

Tota fracció té una expressió decimal que s'obté dividint el numerador entre el denominador:
a/b = a:b
Exemples :

$$\frac{3}{25}=0,12;\frac{68}{99}=0,686868...;\frac{91}{80}=1,1375;\ \frac{177}{90}=1,9666...$$

Com pots observar unes vegades l' expressió decimal és exacta (donat que el residu és 0) i unes altres surt periòdica, infinits decimals entre els que es repeteix un bloc de xifres que se denomina període.

Sempre surt així, exacte o periòdic?, Contesta't quan hagis llegit el següent :

Fem 1/17 = 1 : 17 = 0,05882352941…, que són xifres que mostra la calculadora, no sembla tenir període, però serà possible que sí el tingui però que no el veiem per ser molt llarg?

```
100  |_17__
 150  0,05882
  140
    40
     6
     ...
```

Comencem a fer la divisió:
Els residus obtinguts són 10; 15; 14; 4; 6; …
Com saps els residus són inferiors al divisor i, en aquest cas poden ser 1; 2; 3; 4; …; 15 o 16, el 0 no pot sortir, ho explicarem després.
Farem ara 2 preguntes: Què passa si torna a sortir el mateix residu 2?, ¿A la força han de repetir-se algun cop el residu?
La resposta a la primera pregunta és que si es repeteix un residu es repetirà la xifra del quocient ja que a partir d'aquí es repetiran totes en forma de període.
La resposta a la segona pregunta es: ¡Sí, a la força, segur que sí!, si tenim 16 possibles residus i suposem que han sortit els 16 possibles ja, què passa al treure el següent ?

Potser ho entendràs millor amb caramels. Tinc molts caramels per repartir entre 16 persones, ja li he donat 1 caramel a cadascú, és a dir, tots tenen ja 1 caramel, em disposo a repartir el següent. Li tocarà a algú que ja en té ?
A això es denomina en matemàtiques ***"El Principi del Palomar"*** i és una eina molt potent. Busca alguna

cosa sobre ell.

Poso 5 pilotes en 4 caixes, ¿hi haurà alguna caixa amb més d'1 pilota?

Esperem que ho hagis entès, **en el pitjor dels casos** el resto número 17 ha de coincidir amb algun dels anteriors, es repetiran les xifres del quocient i per tant l'expressió decimal és periòdica.

Pots comprovar que efectivament els residus són 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, 10, …, el pitjor dels casos possibles, es repeteix el que fa el número 17. Lo normal és que es repeteixi abans. Per cert, la divisió surt :

1:17 = 0,**0588235294117647**0588235294117647… un període de només 16 xifres!

Tot i que hem vist un cas particular, aquesta és una regla general:

L'expressió decimal d'una fracció és exacta o periòdica.

El número de xifres del període és de de 1/*n* és menor o igual que *n* – 1.

Quant surt exacta i quant periòdica?

Doncs és fàcil, ens donaran una fracció com per exemple $\frac{27}{150}$, primer la simplificarem fins obtenir la irreductible: $\frac{27}{150}=\frac{9}{50}$, ens fixem només amb el denominador i el factoritzem en factors primers, $50 = 5 \cdot 10 = 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$, com els factors primers són només 2 i 5 l' expressió decimal és exacta.

Vegem el motiu :

$2 \cdot 5^2$ és divisor de $2^2 \cdot 5^2 = 100$ una potència de 10. Es compleix $\frac{2^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 5^2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 5^2} = \frac{2}{100} = 0,02$, només falta multiplicar per 9 ➔ $\frac{9}{2 \cdot 5^2} = 0,02 \cdot 9 = 0,18$.

Fixa't que el número de decimals és 2, el major dels exponents de 2 i 5.

Per exemple $\frac{1}{2^4 \cdot 5^3} = 0,0005$ té 4 xifres decimals doncs el major exponent és 4.

En general $\frac{1}{2^n \cdot 5^m}$ té expressió decimal exacta i el número de xifres decimals és el màxim entre *n* i *m*.

L'altre cas : $\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$, Factoritzem el 21 en factors primers, $21 = 3 \cdot 7$, com que hi ha factors diferents de 2 i 5 l'expressió serà periòdica.

Vegem: si la expressió fos exacta podríem escriure $\frac{10}{3 \cdot 7} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow \frac{10 \cdot 10^n}{3 \cdot 7} = a$, amb "*a*" un número enter. Però ¡això no pot ser !, 10 només té els factors 2 i 5 i els factors 3 i 7 no poden simplificar-se.

Como no pot exacta serà periòdica.

Si en el denominador d'una fracció irreductible apareixen factors primers diferents de 2 i de 5 l' expressió decimal serà periòdica.

Activitats proposades

11. Sense fer la divisió indica si les següents fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

3.2. Forma de fracció d'una expressió decimal

Els números decimals exactes o periòdics poden expressar-se com una fracció

$$1{,}175 = \frac{1175}{1000} = \frac{47}{40}$$

$$20{,}68 = \frac{2068}{100} = \frac{517}{25}$$

$$3{,}1416 = \frac{31416}{10000} = \frac{3927}{1250}$$

.

De decimal exacte a fracció:

És molt fàcil, mira els exemples de la dreta :¿Has enganxat el truc ?

Es posa en el numerador el número sense la coma i en el denominador la unitat seguida de tants zeros com xifres decimals té. Es simplifica la fracció.

Les persones intel·ligents comproven els que han fet, divideixen 47 entre 40, si et dóna 1,175 ¡està bé!! , i no fa falta que ningú t'ho digui ☺

De decimal periòdic a fracció:

Abans de veure el mètode rigorós, anem a jugar una estoneta.

Agafa la **calculadora** i fes les següents divisions i apunta els resultats decimals en el teu quadern:

1:9; 2:9; 3:9; 8:9; 1:99; 13:99; 37:99; 98:99; 1:999; 123:999; 567:999; 998:999.

Nota:

Al fer 6/9 la calculadora dóna 0,6666666667, realment és 6 periòdic, la calculadora ho fa bé i arrodoneix en la última xifra.

Si has observat bé ja saps escriure un munt d'expressions decimals periòdiques en la seva forma de fracció.

Per exemple :

0,444…= 4/9;

0,333… = 3/9 = 1/3.

0,171717…= 17/99;

0,454545… = 45/99 = 5/11;

0,878787= 87/99 = 29/33

0,337337337… = 337/999;

0,549549…= 549/999 = 61/111

¿Cóm serà 0,1234512345…?, Doncs 12345/99999 = 4115/33333

Així que ja saps, per tenir un període de *n* xifres el denominador té *n* nous.
Però el truc anterior no serveix per 5,888…

L'adaptem : 5,888… = 5 + 0,888… = 5 + $\frac{8}{9} = \frac{45}{9} + \frac{8}{9} = \frac{53}{9}$
Segueix sense valdre per 0,7333…

Farem 0,7333… = 0,7 + 0,0333… = $\frac{7}{10} + \frac{3}{9} : 10 = \frac{7}{10} + \frac{3}{90} = \frac{21}{30} + \frac{1}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$
Combinant els 3 trucs anterior surten tots, però no seguim, et deixem que investiguis tu. Nosotres anem a explicar el mètode serio.

Un altre exemple :

Ens demanen expressar el número 7,3252525... a la seva forma de fracció. El primer serà posar-li un nombre, per exemple *N* = 7,3252525…, el segon és a**conseguir 2 números amb la mateixa part decimal**.

El anteperíode té 1 xifra i el període 2. Para aconseguir la mateixa part decimal multipliquem per 1000 i la coma se'n va fins després del període , si multipliquem per 10 la coma se'n va fins davant del període .

$$\begin{array}{r} 1000N = 7325{,}2\cancel{5}25\ldots \\ -\quad 10N = \quad 73{,}2\cancel{5}25\ldots \\ \hline 990N = 7252 \end{array} \Rightarrow N = \frac{7252}{990} = \frac{36}{4}$$

Ja tenim 2 números amb la mateixa part decimal, si els restem aquesta desapareix i podem aïllar *N*.
Fixa't que la resta es fa en els dos membres a la vegada

Mètode formal:

Multipliquem el número per la potència de 10 necessària per emportar-nos la coma al final del primer període, després el multipliquem una altre cop per a que la coma quedi al principi del primer període

Un altre exemple i ho entens :

N = 15,25636363…

¿Cóm aconseguir 2 números amb la part decimal ,636363…?
Doncs el més fàcil és 10000*N* = 152563,6363… i 100*N* = 1525,6363…

Restem : $9900N = 151038 \rightarrow N = \frac{151038}{9900} = \frac{8391}{550}$

Aquests són els casos més difícils (periòdics mixtos), quan no hi ha anteperíode (periòdic pur) només hauràs de multiplicar una vegada donat que ja tenim el període just després de la coma:
$N = 4{,}545454...$

$100N = 454{,}5454...$
$-\ 1N = 4{,}5454...$

____

$99N = 450 \rightarrow N = \frac{450}{99} = \frac{50}{11}$

Exemples :

N

N	**10N –**	**1N =**	**9N**	
1,333…	**13,333… –**	**1,333… =**	**12**	**N = 12/9**
N	**100N –**	**10N =**	**90N**	
5,6777…	**567,77… –**	**56,77… =**	**511**	**N = 511/90**
N	**1000N –**	**100N =**	**900N**	
8,65888 …	**8658,88… –**	**865,88… =**	**7793**	**N = 7793/900**

Per últim, si et diuen que hi ha un truc per fer-ho en segons i sense escalfar-se el cap, és cert. Existeix i el coneixem. És una regla que s'oblida i per tant no val per res, no és raonada.

Activitats proposades

12. Passa a fracció i simplifica:

1,4142
0,125
6,66

13. Passa a fracció i simplifica
1,41424142…
0,125125…
6,666…

14. Passa a fracció i simplifica 1,041424142…
0,7125125…
6,7666…

15. Passa a fracció i calcula

0,333… + 0,666…

0,888… · 2,5

0,65 : 0,656565…

4.- RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MITJANÇANT FRACCIONS.

Vegem uns quants exemples ::

- *Quants litres hi ha en 90 ampolles de 3 quarts de litre cadascuna ?*
  El primer que has de fer és posar-te un exemple amb números més fàcils.

Tinc 10 ampolles cada una de 2 litres. Està clar que tenim 20 litres, ¿quina operació hem fet?, ¿multiplicar?, doncs el mateix amb els números del problema:

$$\frac{3}{4} litros/botella \cdot 80 botellas = \frac{3 \cdot 80}{4} = 60 litros$$

(Observa que ampolles se'n van amb ampolles i les unitats final són litres).

- *Quantes ampolles de 3 octaus de litres necessito per envasar* 900 *litres?*

Novament canviem els números per altres senzills : Vull envasar 10 litres en ampolles de 2 litres. Està clar que necessito 5 ampolles.

Fem el mateix amb els nostres números:

900 litres : $\frac{3}{8}$ litres/ampolla = $900 : \frac{3}{8} = 900 \cdot \frac{8}{3} = 300 \cdot 8 = 2400$ ampolles

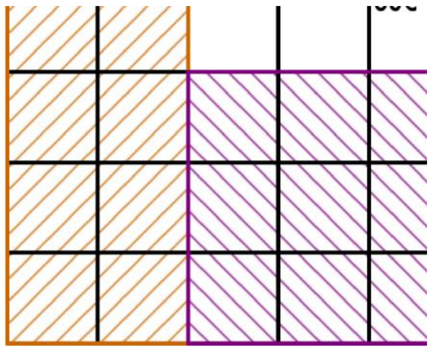
Fixa't que litres se'n van amb litres i que les ampolles que divideixen en el denominador al final passen multiplicant en el numerador, per això que unitat del resultat és "ampolles".

$$\frac{litros}{1} : \frac{litros}{botella} = \frac{litros \cdot botella}{litros} = botella$$

- *Maria guanya una certa quantitat de diners al mes, si es gasta el* 40 *% d'ell en pagar la lletra del pis, el* 75 *%* ***del que li queda*** *en factures i li sobren* 90 € *per menjar . Quant guanya i quant gasta en el pis i en factures?*

El primer : 40 % = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ i 75 % = $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

El farem de 2 maneres i esculls la que més t'agradi :



a) Mètode gràfic:

Fem un rectangle de 5 x 4 quadrats que són els denominadors
De les 5 franges verticals iguals traiem 2 que és lo que es gasta en la lletra del pis.
El que queda està dividit en 4 parts iguals i traiem 3 que és el que es gasta en factures. Ens queden 3 quadradets que són els 90 € del menjar. Així un quadradet és 90 : 3 = 30 €.
El que guanya és 30 · 20 = 600 €.
En la lletra es gasta **30 · 8 = 240 €** i en factures **30 · 9 = 270 €**.

b) Amb fraccions:

Si a una quantitat li traiem els seus 2/5 ens queden 3/5 d'ella (1 – 2/5 = 5/5 – 2/5)

En factures ens gastem $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$

Si teníem 3/5 i ens gastem 9/20 ens queden $\frac{3}{5}-\frac{9}{20}=\frac{12-9}{20}=\frac{3}{20}$ de la quantitat inicial. Aquests 3/20 ens diuen que són 90 €. Per tant 1/20 seran 90 : 3 = 30 €.
La quantitat total són els 20/20, i per tant 30 · 20 = 600 €.
Tenim

Tinc	Trec	Eme queda
1	2/5	3/5
3/5	3/4 de 3/5 = 9/20	3/5 – 9/20 = 3/20

En la lletra del pis em gasto 2/5 de 600 = 1200 : 5 = 240 € i en factures 3/4 de (600 – 240) = 3/4 de 360 = 270 €.
En qualsevol cas els problemes es comproven.
40 % de 600 = 0,4 · 600 = 240 € es gasta en la lletra.
600 – 240 = 360 € em queden.
75 % de 360 = 0,75 · 360 = 270 € es gasta en factures.
360 – 270 = 90 € que li queden per menjar ¡Funciona!

- *Una pilota perd en cada bot 1 cinquè de l'altura des de la que cau.*
  - *a) Quants bots ha de donar per que l'altura aconseguida sigui inferior a 1 dècim de la inicial?*
  - *b) Si després del quart bot la seva altura és de 12,8 cm, Quina era l'altura inicial?*

a) El primer és donar-se compte de que si perd un cinquè de l'altura es queda amb els 4 cinquens d'aquesta. Per tant en cada bot l' altura es multiplica por 4/5.

Tenim que veure per a quina n es compleix $\left(\frac{4}{5}\right)^n < \frac{1}{10}$ = 0,1

I això ho farem provant amb la calculadora: $\left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0,107 > 0,1$ però $\left(\frac{4}{5}\right)^{11} \approx 0,0859 < 0,1$, així fan falta 11 bots.

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$ que és la fracció per la que s'ha multiplicat l'altura inicial.

$\frac{256}{625}h = 12,8 \Rightarrow$ h = $12,8 \cdot \frac{625}{256} = 31,25cm$

- *A la Mariona li descompten la cinquena part del seu sou en concepte de l' IRPF i la sisena part del mateix per a la Seguretat Social. Si cobra* 600 € *nets, Quin és el seu sou brut ?*

Sumem les dues fraccions donat que es refereixen a la mateixa quantitat: $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6+5}{30} = \frac{11}{30}$ que és la part que li descompten del sou brut per tenir el net. Li queden $1 - \frac{11}{30} = \frac{19}{30}$ de la quantitat inicial. Aquests 19/30 ens diuen que són 600 €.

Para calcular el sou brut fem : $600 \cdot \frac{30}{19} \approx 947,37€$.

Comprovació :

1/5 de 947,37 = 189,47 € paga de IRPF
1/6 de 947,37 = 157,90 € paga a la SS
947,37 – 189,47 – 157,90 = 600 € que és el sou net. ¡Bé!
Podria haver hagut un petit error d'algun cèntim degut a les aproximacions

---

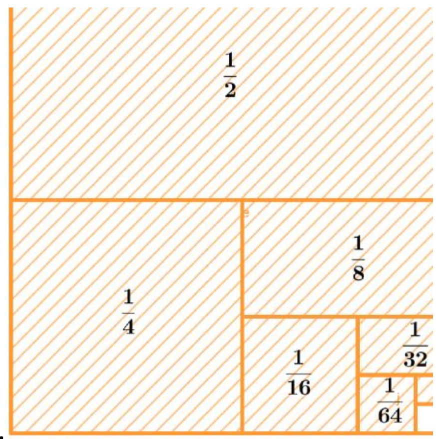
CURIOSIDADES. REVISTA

Suma de infinites fracciones.

- El sentit comú ens diu que si sumem infinits números positius la suma ha de ser infinita. Doncs, ¡no necessàriament !

Et proposem un repte, anem a sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ on cada fracció és la meitat de la anterior. Els punts suspensius indican que això no s'acaba mai, en teoria hauríem de sumar i sumar i seguir sumant de forma indefinida. En la pràctica no pot fer-se, però per això estan les matemàtiques.

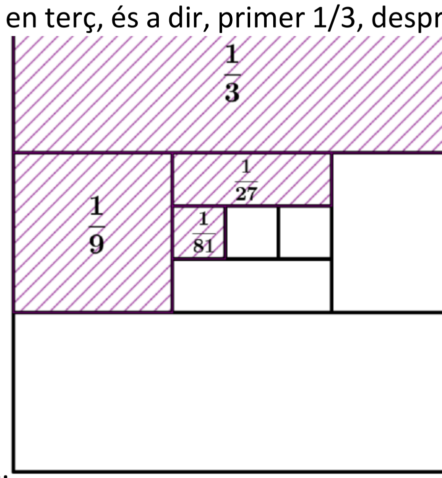
Agafa la calculadora i comença : 1:2 + 1:4 + 1:8 + 1:16 +1:32 + 1:64
Et dóna 0,984375 o si tens sort 63/64, ¡només falta 1/64 per arribar a 1!
Suma ara al resultat anterior 1/128, obtenim 0,9921875 o el que és el mateix 127/128, només falta 1/128 per arribar a 1.Has de seguir, els següents números a sumar són 1/256, 1/512, 1/1024, …
Si t'has fixat ens apropem cada cop més a 1. Val, no anem a arribar mai, però si volguéssim donar-li un valor a la suma infinita de dalt, Tu quin li donaries ?



Els matemàtics li donen el valor 1.

Observa. Tens una fulla de paper quadrada d'àrea 1. La talles per ma meitat, i deixes el tros tallat damunt de la taula i el sense talar en la teva mà. Tornes a tallar per la meitat el tros que tens en la mà, i tornes a deixar damunt de la taula el tros tallat. I si segueixes i segueixes … Sumes els trossos de paper que tens en la taula. ¿Podria alguna cop sumar més de 1? No, evidentment, són trossos d'un paper d'àrea 1. ¿Algun cop tindries tot el paper damunt de la taula ? Cada cop tens menys paper en la mà i més en la taula, però al tallar per la meitat, mau el tindràs. Malgrat així, els matemàtics diuen que en l'infinit aquesta suma val 1.

- Ara tenim una pizza i ens l'anem a menjar de terç en terç, és a dir, primer 1/3, després 1/3 de 1/3,



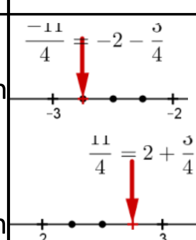
després 1/3 de 1/3 de 1/3, i així successivament…

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots=$$

¿Quant creus que val aquesta suma?

RESUM

Prioritat de les operacions

Prioritat de les operacions	1r Parèntesis interiors, 2n Potències i arrels, 3r Productes i divisions, 4t Sumes i restes.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signe de la suma	(+) + (+) = (+) es sumen, (–) + (–) = (–) es sumen (+) + (–) = ¿? Té el signe del major en valor absolut	–7/3 – 8/3 = –15/3 = –5 –12/5 + 8/5 = –4/5
Signe del producte i la divisió	Si tenen igual signe dóna positivo. (+)·(+) = (–)·(–) = (+) Si tenen signe contrari dóna negativo. (+)·(–) = (–)·(+) = (–)	–4 · (–10) = +40 +2 · (–15) = –30
Número Racional	Un número *r* és racional si pot escriure's com *r* = *a*/*b* amb *a, b* enters i $b \neq 0$.	2; 3/8; —7/2 són racionals. També 0,125 y 2,6777… $\sqrt{2}$ *y* π no ho són
Fracció irreductible	S'obté dividint el numerador i el denominador pel mateix número. Numerador i denominador són primers entre sí.	360/840 = 3/7, la última és irreductible.
Fracciones equivalents	Són equivalents les fraccions que tenen igual expressió decimal. Dos fraccions equivalents representen al mateix número racional. Els seus productes creuats valen el mateix	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{15}{20}$ = 0,75 són equivalents. 3 · 20 = 4 · 15
Ordenació de fraccions	Es passen a comú denominador o es troba el seu valor decimal o s' usa la lògica i el truc *a*/*b* < *c*/*d* si *ad* < *bc* per a números positius.	$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{9}{10}$ *ya que* $\frac{15}{20}<\frac{16}{20}<\frac{18}{20}$
Representació	Si és necessari es passen a forma mixta. Per *n* + *a*/*b* dividim la unitat que va de *n* a *n* + 1 en *b* parts iguals i en prenem *a*. Para –*n* – *a*/*b* dividim la unitat que va de –*n* a –*n* – 1 en *b* parts iguals i comptem *a* començant en –*n*.	
Suma i resta de fraccions	Es passes a comú denominador i es sumen (resten) els numeradors.	$\frac{5}{6}-\frac{7}{8}=\frac{20}{24}-\frac{21}{24}=\frac{-1}{24}$

Producte i divisió	$a/b \cdot c/d = ac/bd$ $a/b : c/d = a/b \cdot d/c = ad/bc$	$\frac{2}{7}\cdot\frac{14}{6}=\frac{2\cdot 2\cdot 7}{7\cdot 2\cdot 3}=\frac{2}{3}$ $\frac{6}{5}:\frac{14}{10}=\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{14}=\frac{6}{7}$
Fracció d'un número	a/b de $x = a/b \cdot x = (ax)/b$	3/4 de 60 = 3/4 · 60 = 45 3/4 de 4/5 = 3/4 · 4/5 = 3/5
Xifres significatives	És el número de xifres "*amb valor*" que s'utilitzen per aproximar un número	0,025 té 2 3,020 té 4 3000 no sabem les té
Errors	Error absolut: EA = $\lvert valor\ real - valor\ aproximado \rvert$ Error relatiu: ER = $\frac{EA}{\lvert Valor\ real \rvert}$ es multiplica por 100 per obtenir el % de ER.	$\frac{2}{3} \approx 0,7 \Rightarrow EA \approx 0,033$ $\Rightarrow ER \approx \frac{0,033}{2/3} \approx 0,050 \Rightarrow 5$
Fraccions i decimals	L'expressió decimal d'una fracció sempre és exacta o periòdica. Exacta si el denominador només té com a factors primers el 2 o el 5. Periòdica en cas contrari.	3/40 = 0,075 exacta 5/12 = 0,41666... periòdica
Pas de decimal a fracció	Expressió decimal exacta: es divideix el número sense la coma entre la unitat seguida de tants zeros com xifres decimals. Expressió decimal periòdica: Es multiplica N per potències de *10 fins a*conseguir 2 números amb la mateixa part decimal, es resten i s'aïlla *N.*	3,175 = 3175/1000 = 127/40 N= 2,0333... 100N – 10N = 183 90N = 183➔ N = 183/90=61/30.

EXERCICIS I PROBLEMES.

16. Troba pas a pas

(–5 + 4 · (–2) +7) : (7 – (3 – 4) · (–1))

17. Ordena de menor a major :

$$\frac{8}{9};\frac{-8}{9};\frac{4}{5};\frac{38}{45};\frac{77}{90};\frac{-9}{8}$$

18. Indica raonablement quina fracció és major:

$a)\frac{102}{101}\ y\ \frac{98}{99}\quad b)\frac{98}{99}\ y\ \frac{97}{98}\quad c)\frac{-102}{101}\ y\ \frac{-103}{102}$

19. Demostra que 4,999... = 5

Generalitza: ¿Quant val *n*,999...?

20. Passa a forma mixta: $\frac{16}{9};\frac{152}{6};\frac{-17}{5};\frac{-23}{4}$

21. Representa de forma **exacta** en la recta numèrica:

$\frac{760}{240}$; 3,125; $-\frac{46}{14}$; -2,1666...

22. Simplifica:

$a)\ \frac{2\cdot 7\cdot 15}{21\cdot 10}\quad b)\ \frac{10+6}{10-2}\quad c)\ \frac{2\cdot 3+4}{2\cdot 5+10}$

23. Troba la fracció que cau just enmig de 3/2 i 9/4 en la recta numèrica.

Pista: La mitjana aritmètica $\frac{a+b}{2}$ Representa las 3 fraccions en la recta numèrica.

24. La mitjana harmònica es defineix com H(***a***, ***b***) = $\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$, l' invers de la mitjana aritmètica dels inversos.

a) Demostra que H(a, b) = $\frac{2ab}{a+b}$

b) Troba $H\left(\frac{3}{2},\frac{11}{3}\right)$

25. Troba la fracció inversa de $3+\frac{4}{5}:\frac{6}{10}$

26. Opera i simplifica: $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{7}{2}$

27. Resol pas a pas:

$$\frac{\frac{3}{5}-\frac{2}{5}:\frac{4}{6}}{\frac{3}{5}:\left(\frac{1}{6}-2\right)}$$

28. Calcula les dues terceres parts de la sisena part del 80% de 900.

29. Troba el número tal que els seu quart terç val 520.

30. Quants pots de tres octaus de litre puc omplir amb 12 litres?

31. Calcula la fracció per la que cal multiplicar 450 per obtenir 720.

32. Si 100 polsades són 254 cm:

a) Troba el llarg en centímetres d'una televisió si l'altura són 19,2 polsades i llarg/alt = 4/3
b) Igual però ara llarg/alt = 16/9

33. Si en una classe el 77,777… % dels alumnes aproven i n'hi ha més de 30 alumnes però menys de 40, Quants alumnes són i quants aproven?

Tres peregrinos deciden iniciar un viaje de 8 días. El primero de los peregrinos aporta 5 panes para el camino, el segundo peregrino, 3 panes, y el tercero no aporta ninguno, pero promete pagarles a sus compañeros al final del viaje por el pan que haya comido. Cada uno de los días que duró el viaje, a la hora de comer sacaban un pan de la bolsa, lo dividían en tres pedazos y cada peregrino se comía un pedazo. Cuando llegaron a su destino, el caminante que no había aportado ningún pan sacó 8 monedas y las entregó a sus compañeros: 5 monedas para el que había puesto 5 panes y 3 monedas para el que había contribuido con 3 panes. ¿Podrías explicar por qué este reparto de monedas no es justo? ¿Cuál sería el reparto justo? (*Problema de la Olimpiada de Albacete*. ¡! Se debe tener en cuenta no los panes que uno ha puesto sino lo que realmente ha aportado (lo puesto menos lo comido).

34. Quantes ampolles de 3/4 de litre necessito per tenir la mateixa quantitat que hi ha en 60 ampolles de 3/5 de litre?

35. Trobar un número enter de tal forma que: la seva meitat, la tercera part, la seva quarta part, la seva cinquena, la seva sisena i la seva setena part siguin números enters.

36. A la unitat li trec les seves dues cinquenes parts. Per quina fracció cal multiplicar el resultat per arribar un altre cop a la unitat ?

37. Troba la fracció resultant:

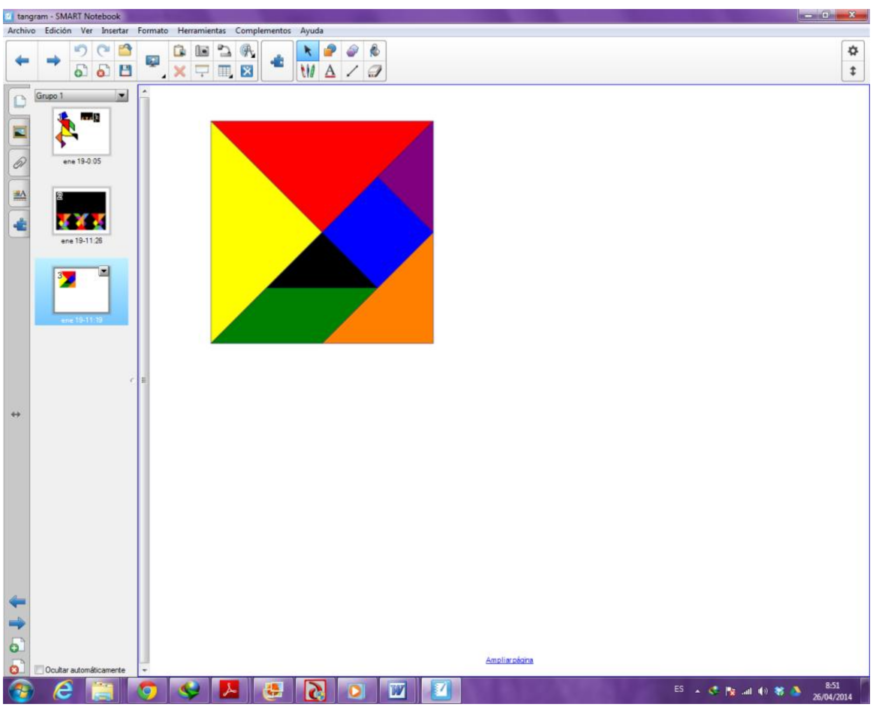
a) Trec 1 terç del que tinc i després afegeixo 1 terç del que queda.
b) Afegeixo 1 terç del que tinc i després trec 1 terç del resultat.

38. *Joc 1 :* Estàs avorrit i decideixes jugar al següent joc : Avances un metro en línia recta, retrocedeixes la meitat, avances la meitat del que has retrocedit en l'últim pas, retrocedeixes la mitat del que has avançat en l' últim pas, …

Si ho fas molts cops, però molts cops, Quants avances en total ?

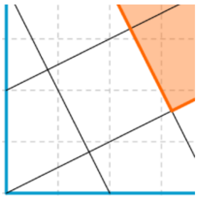
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots=$$

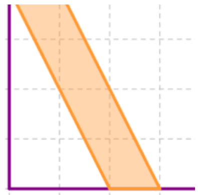
39. Darío dóna passo de 3/5 de metre, el seu gos Tro dóna passos de ¼ de metre. Si ambdós van a igual velocitat i el Tro dóna 360 passos per minut, ¿Quants passos per minut donarà Darío?

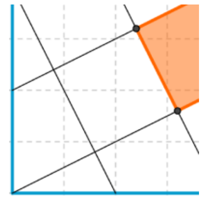


40. La figura superior és n "***Tamgran***".

a) Troba la fracció que es correspon amb a cadascuna de les 7 peces.
b) Si el costat del quadrat és de 20cm, troba l'àrea de cada peça.
c) Si el costat del quadrat és de 4 c, troba la fracció i l'àrea de la zona pintada:







41. Calcula*:*

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$ b) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)^3+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ c) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$

AUTOAVALUACIÓ

1. Saps operar amb números enters, coneixes la prioritat de les operacions i l'ús de parèntesis. Resol pas per pas:

(–8 – 7 · (–4 + 6) : (2 + (–3)) + 5 – 4 · 2^2) · (–2)

2. Sabes obtenir fraccions equivalents. Ordena de **major a menor**:

$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-7}{8};\frac{-5}{6};\frac{-5}{4}$

3. Saps representar fraccions de forma exacta en la recta numérica. Representa:

$\frac{3}{4};\frac{17}{6};\frac{-11}{7};-0,125$

4. Saps operar amb fraccions. Resol pas a pas i simplifica:

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}:\left(2-\frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$$

5. Saps trobar la fracció d'un número i la fracció d'una fracció

a) Troba les quatre cinquenes parts dels cinc octaus de 360.

b) Una ampolla té plenes les seves set octaves parts, si conté 840 cm^3, ¿Quants li cabrà quan estigui plena ?

6. Saps diferenciar quan una fracció té una expressió decimal exacta.

a) Digues quines de les següents fraccions té expressió decimal exacta i quines periòdica:

$$\frac{6}{120};\frac{5}{180};\frac{42}{210}$$

b) ¿Quants decimals té $\frac{1}{2^{10}\cdot 5^{6}}$?

c) ¿Quantes xifres com a màxim pot tenir el període de 1/97?

7. Saps passar de decimal a fracció. Passa a fracció i simplifica:

a) 2,225 b) 2,2252525... c) $\frac{0{,}125}{0{,}125125125...}$

8. Saps resoldre problemes mitjançant fraccions.

Una medusa creix cada setmana un terç del seu volum.

a) Quantes setmanes han de passar per a que el seu volum els multipliqui per més de 3 ?

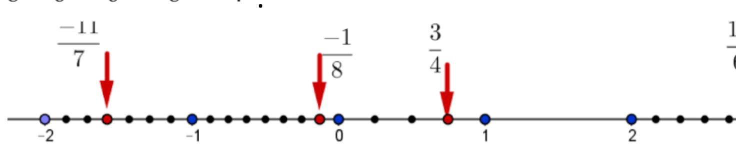
b) Si el seu volum actual és de 1200 cm^3, Quin serà el seu volum fa 3 setmanes?

9. A un treballador li baixen el sou la sisena part, de lo que **li queda** el 25 % va destinat a impostos i per últim, del resto que **li queda** les dues cinquenes parts se les gasta en pagar la hipoteca del pis. Si encara té disponibles 450 €, ¿Quant cobrava abans de la baixada del sou ? Quant paga d'impostos i de hipoteca?

Solucions:

1) 10.

2) $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$.

3) 

4) $\frac{7}{2}$.

5) a) 180;
b) 960 cm^3.

6) a) Primer es simplifiquen, són exactes 6/120 i 42/150. 5/180 té expressió decimal periòdica.

b) 10 xifres decimales.

c) 96 xifres (de fet les té).

7) a) $\frac{89}{40}$

b) $\frac{2203}{990}$

c) $\frac{999}{1000} = 0{,}999$

8) a) 4 setmanes.

b) 506,25 cm^3.

9) Cobrava 1200 €. Ara cobra 1000 €, paga 250 € d'impostos i 300 € de hipoteca.